

## Έβδομο Τεστ Απειροστικός Λογισμός 1

Διάρκεια 90 Λεπτά

**Στοιχειοθεσία:** Δήμογλου Κωνσταντίνος, Μαθηματικός (Msc)

### Θέμα 1

Να απαντήσετε αν οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι αληθείς ή ψευδείς με πλήρη αιτιολόγηση.

- (i) Μια παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  είναι γνησίως αύξουσα αν και μόνο αν  $f'(x) > 0$  για κάθε  $x \in (a, b)$ .
- (ii) Αν  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  είναι συνεχής συνάρτηση στο  $[a, b]$  και παραγωγίσιμη στο  $(a, b)$  με  $f'(x) \neq 0$ , για κάθε  $x \in (a, b)$ , τότε η  $f$  είναι 1-1.
- (iii) Η εξίσωση  $3^x + 4^x = 5^x$  έχει μοναδική λύση την  $x = 2$ .
- (iv) Αν  $D \subset \mathbb{R}$  και  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  παραγωγίσιμη στο  $D$  με  $f'(x) = 0$ , για κάθε  $x \in D$ , τότε η  $f$  είναι σταθερή στο  $D$ .
- (v) Υπάρχει παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  τέτοια ώστε  $f'(x) = \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ -1 & , x < 0 \end{cases}$

### Θέμα 2

Δίνεται  $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  συνεχής στο  $[0, 2]$  και παραγωγίσιμη στο  $(0, 2)$  με  $f(0) = 0, f(1) = f(2) = 1$ . Να δείξετε ότι:

- (i) υπάρχει  $x_1 \in (0, 1)$  ώστε  $f'(x_1) = 1$ .
- (ii) υπάρχει  $x_2 \in (1, 2)$  ώστε  $f'(x_2) = 0$ .
- (iii) υπάρχει  $x_3 \in (0, 2)$  ώστε  $f'(x_3) = \frac{1}{3}$ .

### Θέμα 3

(i) Έστω  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μια παραγωγίσιμη συνάρτηση με  $f(0) = 1$  για την οποία τέτοιο ώστε  $f'(x) > \frac{1}{5}$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Να δείξετε ότι η  $f$  έχει ακριβώς μία ρίζα στο  $(-5, 0)$ .

(ii) Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x}{\sin x}$ ,  $x \in (0, \pi)$ .

(a) Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία της.

(b) Να δείξετε ότι  $\frac{2}{\sin 1} < \pi$ .

ΚΑΛΗ ΤΥΧΗ!!